MA-2112: PRIMER PARCIAL TIPO D

Universidad Simón Bolívar

Departamento de Matemáticas Puras y Aplicadas

Sartenejas Enero-Abril 2010

Nombre:____. Carnet:______________________.

JUSTIFIQUE TODAS SUS RESPUESTAS

1. (12 pts.) Dada la función definida por:

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3+y^3}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) = (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \end{cases}$$

   a) Halle (si existen) las derivadas parciales en el origen.

   b) Halle (si existe) la derivada direccional de f, en el origen, según el vector $\vec{u} = (2,3)$.

   c) Diga si f es diferenciable en el origen.

2. (12 pts.) Dadas las funciones diferenciables $f(x,y) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $g(x(t), y(t)) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ y su función compuesta $H(t) = f(g(t)) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, aplique la regla de la cadena y exprese las derivadas que se indican a continuación por medio de las derivadas de f y g:

   a) $\dfrac{dH}{dt}$ (4 ptos.).

   b) $\dfrac{d^2H}{dt^2}$ (8 ptos.).

3. (13 pts.) Halle los puntos del paraboloide de ecuación $z = 2x^2 + 3y^2$ en los cuales el plano tangente es perpendicular al plano de ecuación $x - y - 3z = 0$ y es paralelo a la recta representada por

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{3} = \frac{z-5}{4}$$

4. (13 pts.) Halle los máximo y mínimo absolutos de la función $f : A \to \mathbb{R}$ definida por $f(x,y) = 2x + 3y$ siendo $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 \leq y \leq 4\}$.

SOLUCIÓN

1. Respondemos **a)**: Calculamos las derivadas parciales por definición:

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) &= \lim_{h\to 0}\frac{f(0+h,0)-f(0,0)}{h}\\ &= \lim_{h\to 0}\frac{f(h,0)-0}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{h^3/h^2}{h}\\ &= \lim_{h\to 0}\frac{h^3}{h^3} = \lim_{h\to 0} 1\\ \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) &= 1 \ \blacksquare\end{aligned}$$

Análogamente,

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) &= \lim_{h\to 0}\frac{f(0,0+h)-f(0,0)}{h}\\ &= \lim_{h\to 0}\frac{f(0,h)-0}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{h^3/h^2}{h}\\ &= \lim_{h\to 0}\frac{h^3}{h^3} = \lim_{h\to 0} 1\\ \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) &= 1 \ \blacksquare\end{aligned}$$

Respondemos **b)**: Dado que no hemos determinado si f es diferenciable en el origen, no podemos utilizar el teorema que relaciona la derivada direccional con el gradiente de f. Entonces, para determinar la derivada direccional, utilizamos la definición:

$$D_{\vec{\mathbf{v}}}f(0,0) = \lim_{t\to 0}\frac{f((0,0)+t\vec{\mathbf{v}})-f(0,0)}{t}$$

donde el $\vec{\mathbf{v}}$ es unitario. Dado que nos piden la derivada direccional según el vector $\vec{\mathbf{u}} = (2,3)$, basta que $\vec{\mathbf{v}}$ sea el vector unitario de $\vec{\mathbf{u}}$ para poder utilizar la definición.

$$\vec{\mathbf{v}} = \frac{1}{\sqrt{2^2+3^2}}(2,3) = \frac{1}{\sqrt{13}}(2,3)$$

Así,

$$\begin{aligned}D_{\vec{\mathbf{v}}}f(0,0) &= \lim_{t\to 0}\frac{f(t\vec{\mathbf{v}})-0}{t} = \lim_{t\to 0} f\left(\frac{2t}{\sqrt{13}},\frac{3t}{\sqrt{13}}\right)\frac{1}{t}\\ &= \left[\frac{\left(\frac{2t}{\sqrt{13}}\right)^3+\left(\frac{3t}{\sqrt{13}}\right)^3}{\left(\frac{2t}{\sqrt{13}}\right)^2+\left(\frac{3t}{\sqrt{13}}\right)^2}\right]\left(\frac{1}{t}\right)\\ D_{\vec{\mathbf{v}}}f(0,0) &= \left(\frac{t}{\sqrt{13}}\right)\left(\frac{8+27}{4+9}\right)\left(\frac{1}{t}\right) = \frac{35}{13\sqrt{13}} \ \blacksquare\end{aligned}$$

Respondemos **c)**: Finalmente, para determinar si f es diferenciable en el origen, utilizamos la definición; las parciales deben existir en el punto y se debe cumplir el siguiente límite:

$$L = \lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{|f(x,y)-f(0,0)-\langle\vec{\nabla}f(0,0),(x,y)-(0,0)\rangle|}{||(x,y)-(0,0)||} = 0$$

donde $\vec{\nabla} f(0,0) = \left(\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0), \dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0) \right) = (1,1)$.

Probemos el límite:

$$L = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{|f(x,y) - 0 - \langle (1,1),(x,y)\rangle|}{||(x,y)||}$$

$$L = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\left| \dfrac{x^3+y^3}{x^2+y^2} - (x+y) \right|}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{|xy^2+x^2y|}{(x^2+y^2)^{3/2}}$$

Evaluemos el límite para el haz de rectas $y = mx,\ m \neq 0$.

$$\begin{aligned}
L\{y=mx\} &= \lim_{(x,mx)\to(0,0)} \frac{|xy^2+x^2y|}{(x^2+y^2)^{3/2}} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{|x(mx)^2 + x^2(mx)|}{[x^2+(mx)^2]^{3/2}} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{|x^3|\cdot|m^2+m|}{|x^3|(1+m^2)^{3/2}} = \lim_{x\to 0} \frac{|m^2+m|}{(1+m^2)^{3/2}} \\
L\{y=mx\} &= \frac{|m^2+m|}{(1+m^2)^{3/2}}
\end{aligned}$$

Dado que el valor del límite depende del valor de m, es decir, depende de la trayectoria escogida, por el teorema de unicidad del límite, afirmamos que el límite no existe. Como el límite no existe, f no es diferenciable en el origen $\blacksquare$.

---

2. Utilizamos la regla de la cadena pues tenemos una composición de dos funciones diferenciables admisible, tal que la composición es diferenciable.

$$H(t) = f(g(t)) = f(x(t),y(t)) \implies \frac{dH}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt} \quad \blacksquare$$

Para determinar la segunda derivada de H, debemos realizar dos consideraciones: primero, cada término corresponde al producto de dos funciones dependientes de t, debemos usar la regla del producto; segundo, las parciales de f dependen naturalmente de las variables $x(t)$ e $y(t)$, por lo que tendremos que utilizar reiteradamente la regla de la cadena. Por formalidad del ejercicio, mantenemos la notación de Leibniz y Jacobi (utilizada al solicitar las derivadas en el enunciado) a pesar de ser la menos práctica en cuanto a escritura.

$$\begin{aligned}
\frac{d^2H}{dt^2} &= \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt}\right) + \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt}\right) \\
&= \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial x}\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)\frac{dy}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{d^2y}{dt^2} \\
\frac{d^2H}{dt^2} &= \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}\frac{dy}{dt}\right)\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial x}\frac{d^2x}{dt^2} + \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\frac{dy}{dt}\right)\frac{dy}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{d^2y}{dt^2} \quad \blacksquare
\end{aligned}$$

---

3. Procedemos a hallar el gradiente de la función dada:

$$\vec{\nabla} f(x,y,z) = \left(\frac{\partial}{\partial x}\left(f\left(x,y,z\right)\right), \quad \frac{\partial}{\partial\, y}\left(f\left(x,y,z\right)\right), \quad \frac{\partial}{\partial\, z}\left(f\left(x,y,z\right)\right) \right) = (4x,\ 6y,\ -1)$$

Así, sabiendo que el punto genérico $P(a, b, c)$ del paraboloide tiene como vector normal:

$$\vec{p} = (4a,\ 6b,\ -1)$$

Además, dado que la recta dada tiene como vector paralelo:

$$(\vec{l}, \vec{m}, \vec{n}) = (2, 3, 4)$$

Podemos hallar el producto punto entre el vector normal al paraboloide y el punto genérico de la recta e igualarlo a cero, de esta manera, se debe cumplir la siguiente condición para que el plano tangente sea paralelo a dicho vector:

$$(4a, 6b, -1) \cdot (2, 3, 4) = 0 \Rightarrow 8a + 18b - 4 = 0$$

Junto a la condición para que el plano tangente sea perpendicular a $x - y - 3z = 0$, la cual está dada por:

$$(4a, 6b, -1) \cdot (1, -1, -3) = 0 \Rightarrow 4a - 6b + 3 = 0$$

De esta manera, nos queda el siguiente sistema:

$$\begin{cases} 8a + 18b - 4 = 0 \\ 4a - 6b + 3 = 0 \end{cases}$$

Reescribiendo las ecuaciones en su forma matricial, podemos encontrar las soluciones, tal que:

$$\begin{pmatrix} 8 & 18 & | & 4 \\ 4 & -6 & | & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_1 = \frac{1}{2}R_1} \begin{pmatrix} 4 & 9 & | & 2 \\ 4 & -6 & | & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2 = R_1 - R_2} \begin{pmatrix} 4 & 9 & | & 2 \\ 0 & 15 & | & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2 = \frac{1}{15}R_2} \begin{pmatrix} 4 & 9 & | & 2 \\ 0 & 1 & | & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_1 = R_1 - \frac{1}{9}R_2} \begin{pmatrix} 4 & 0 & | & -1 \\ 0 & 1 & | & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \xrightarrow{R_1 = \frac{1}{4}R1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & | & -\frac{1}{4} \\ 0 & 1 & | & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

Por lo tanto, tendremos los valores de:

$$a = -\frac{1}{4} \text{ y } b = \frac{1}{3}$$

Asimismo, recordando que tenemos el punto $P(a, b, c)$ que pertenece al paraboloide:

$$c = 2a^2 + 3b^2 = 2\left(-\frac{1}{4}\right)^2 + 3\left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{1}{8} + \frac{1}{3} = \frac{11}{24}$$

Finalmente, podemos concluir que el punto donde el paraboloide cumple con las condiciones dadas es:

$$P\left(-\frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{11}{24}\right) \blacksquare$$

---

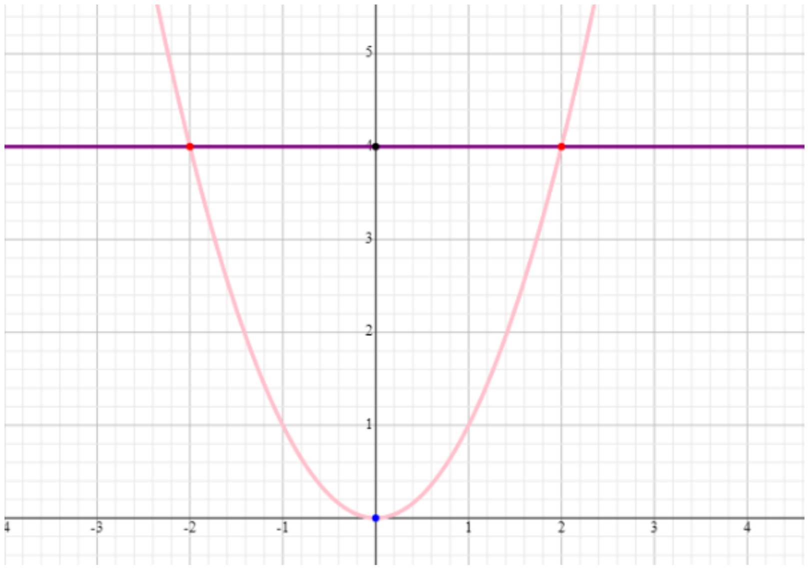
4. Calculando el gradiente, tenemos que:

$$\vec{\nabla} f(x, y) = (2, 3)$$

Donde fácilmente podemos identificar que no se anula en ningún punto, por lo tanto, no existen puntos críticos. Así, identificando los puntos en las fronteras:

$$x^2 \leq y \leq 4$$

Donde $y = x^2$ y $y = 4$. Por tanto, tenemos la gráfica de la región está dada por:



Donde tenemos como puntos extremos: $A(-2, 4)$ y $B(2, 4)$

En vista de que tenemos una inecuación que representa la región acotada por las curvas, establecemos los siguientes parámetros:

Haciendo la ecuación auxiliar: $g(x, y) = y - x^2$:

$$\begin{cases} y = x^2 \\ -2 \leq x \leq 2 \end{cases}$$

Y para el trozo dado por $h(x, y) = y - 4$, tendremos que:

$$\begin{cases} y = 4 \\ -2 \leq x \leq 2 \end{cases}$$

Ahora, hallamos el gradiente que corresponde a cada función, de manera en que podamos aplicar el método de LaGrange.

$$\vec{\nabla} g(x, y) = (-2x, 1)$$
$$\vec{\nabla} h(x, y) = (0, 1)$$

Así, construimos los sistemas:

$$\begin{cases} \vec{\nabla} f(x, y) = \lambda \vec{\nabla} g(x, y) \\ y - x^2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (2, 3) = \lambda(-2x, 1) \\ y - x^2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (2, 3) = (-2\lambda x, \lambda) \\ y = x^2 \end{cases}$$

Al resolver el sistema, obtenemos: $\lambda = 3$, de manera en que:

$$2 = 3(-2x) \Rightarrow x = -\frac{1}{3}$$

Y, además:

$$y = \frac{1}{9}$$

Así, el punto $C\left(-\frac{1}{3}, \frac{1}{9}\right)$ es candidato para máximo o mínimo de la región $g(x)$.

Ahora, para el sistema correspondiente a $h(x,y)$:

$$\begin{cases} \vec{\nabla} f(x,y) = \lambda \vec{\nabla} h(x,y) \\ y - 4 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (2,3) = \lambda(0,1) \\ y - 4 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (2,3) = (0,\lambda) \\ y = 4 \end{cases}$$

Observando que $2 = 0$ no tiene sentido, no existe máximo o mínimo para la región interna de $h(x)$.

Finalmente, podemos determinar entre los puntos $A(-2,4)$, $B(2,4)$ y $C\left(-\frac{1}{3}, \frac{1}{9}\right)$ cuál representa el máximo y el mínimo para $f(x,y)$:

- $f(-2,4) = 2(-2) + 3(4) = -4 + 12 = 8$
- $f(2,4) = 2(2) + 3(4) = 16$
- $f\left(-\frac{1}{3}, \frac{1}{9}\right) = 2\left(-\frac{1}{3}\right) + 3\left(\frac{1}{9}\right) = -\frac{2}{3} + \frac{1}{3} = -\frac{1}{3}$

Así, nuestro mínimo se encuentra en el punto $C\left(-\frac{1}{3}, \frac{1}{9}\right)$ y el máximo en $B(2,4)$.$\blacksquare$

Este parcial fue resuelto y digitalizado conjuntamente por Vicmary Rojas (15-11276) y Asxel Ramírez (18-10322) para GECOUSB

gecousb.com.ve
Twitter: @gecousb
Instagram: gecousb

Se agradece notificar cualquier error de tipeo o en las respuestas y qué debería decir a la dirección gecousb@gmail.com